Examen de Mathématiques du Signal

Vendredi 2 décembre 2005

Durée : 2h Sans documents Calculatrice autorisée

Les réponses aux questions doivent être rigoureusement démontrées.
Le barème est donné à titre indicatif.

Question 1 (3 points)

On rappelle que les fonctions porte et triangle ont pour expressions respectives $rect(\frac{t}{T}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $tri(\frac{t}{T}) = \begin{cases} 1 - |\frac{t}{T}| & \text{si} \quad t \in [-T, T] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
Par ailleurs le sinus cardinal $sinc(t)$ est ici défini par $sinc(t) = \frac{sin(\pi t)}{\pi t}$.
Exprimer la forme d'onde $x(t)$ représentée sur la figure 1 en fonction de $rect(t)$ et $tri(t)$.

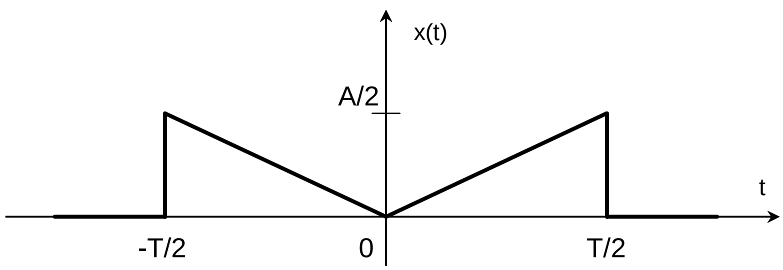

FIGURE 1 – Forme d'onde x(t)

La transformée de Fourier de $x(t)$ est alors

(A) $\frac{jA}{2\pi f}(cos(\pi fT) - sinc(fT))$ (B) $\frac{AT}{2}(sinc(fT) - \frac{T}{4}sinc^2(\frac{fT}{2}))$

(C) $\frac{A}{2\pi f}(sinc(fT) - cos(2\pi fT))$ (D) $\frac{2A}{T}(sinc(\frac{fT}{2}) - sinc^2(\frac{fT}{2}))$

(E) $AT(1 - sinc^2(\frac{fT}{2}))$

Question 2 (1 point)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \quad = \quad ?$$

(A) 1 (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{4}{5}$

Question 3 (1 point)

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Que vaut M^{-1} ?

(A) $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ (B) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ (C) $\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}$

(D) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (E) $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Question 4 (1 point)

La suite $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 27}{3x_n^2}$ converge vers

(A) 3 (B) $\sqrt{3}$ (C) 0 (D) $\sqrt{2}7$ (E) $2\sqrt{3}$

Question 5 (1 point)

Soit $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Pour quelles valeurs de n z est-il réel ?

(A) $4k+2$ (B) $2k$ (C) $k+2$ (D) $2k+1$ (E) $4k$, $k \in \mathbb{N}^*$

Question 6 (2 points)

Soit $\theta \neq 2\pi p$ avec $p \in \mathbb{Z}$. Pour tout entier $n \geq 1$, calculer $\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$. En déduire la somme suivante : $\sum_{k=0}^{n} sin(k\theta)$.

(A) $\frac{sin\frac{n\theta}{2} sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{sin\frac{\theta}{2}}$ (B) $\frac{sin\frac{n\theta}{2}}{sin\frac{\theta}{2}}$ (C) 1 (D) $\frac{sin\frac{n\theta}{2} cos\frac{(n+1)\theta}{2}}{sin\frac{\theta}{2}}$ (E) $\frac{cos\frac{n\theta}{2}}{sin\frac{\theta}{2}}$

Question 7 (1 point)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} =?$$

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) $+\infty$ (E) 2

Question 8 (2 points)

Calculer la décomposition en série de Fourier du signal périodique de période T $x(t) = \frac{4X_{max}t^2}{T^2}$ sur $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.
Grâce au calcul de $x(t)$ à un instant particulier, en déduire ensuite que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad = \quad ?$$

(A) $\frac{\pi^4}{90}$ (B) $-\frac{\pi^2}{12}$ (C) 0 (D) $\frac{\pi^3}{24}$ (E) $\frac{15}{\pi}$

Question 9 (2 points)

Une fonction f est solution d'une équation différentielle du type $y' = ay + b$ (a et b sont des réels, $a \neq 0$). On sait que $f(0) = 2$, $f'(0) = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$. Quelle est l'expression de f ?

(A) $3 + \cos(x)$ (B) $3 - \cos(\frac{x^2}{2})$ (C) $3 + e^{-2x}$ (D) $3\cos(2x) - e^{-x}$
(E) $3 - e^{-x}$

Question 10 (2 points)

Parmi ces 5 intégrales, laquelle est non nulle ?

(A) $\int_0^{2\pi} \sin x dx$ (B) $\int_{-1}^{1} \frac{x\sin(x^2)}{1+x^2} dx$ (C) $\int_0^1 (x^2 - \frac{1}{3}) dx$ (D) $\int_{-1}^{1} x e^x dx$
(E) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{2} dx$

Question 11 (2 points)

Soit le quadripôle représenté sur la figure 2.

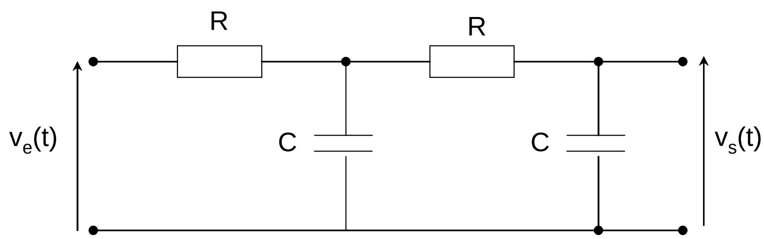

FIGURE 2 – Forme d'onde x(t)

On pose $\begin{cases} Z_1 = 1 \\ Z_2 = R \\ Z_3 = jC\omega \\ Z_4 = (1 + jRC\omega) \end{cases}$

Quelle est l'expression de la matrice de transfert K de ce quadripôle en fonction de Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4.

(A) $\begin{pmatrix} Z_2 + Z_1 Z_3^2 & Z_2 Z_3 + Z_2 Z_1 \\ Z_3 + Z_4 Z_1 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} Z_3 & Z_4 Z_3 + Z_3 Z_1 \\ Z_4 Z_2 + Z_2 Z_1 & Z_2 Z_3 + Z_1^2 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} Z_4^2 + Z_2 Z_3 & Z_4 Z_2 + Z_2 Z_1 \\ Z_4 Z_3 + Z_3 Z_1 & Z_2 Z_3 + Z_1^2 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} Z_2^2 + Z_4 Z_3 & Z_4^2 + Z_2^2 \\ 2 Z_1 Z_3 & Z_4 Z_3 + Z_2^2 \end{pmatrix}$

(E) $\begin{pmatrix} Z_1^2 + Z_3 Z_4 & Z_2 + Z_3 Z_1 \\ Z_4 + Z_2 Z_1 & Z_2^2 + Z_1^2 \end{pmatrix}$

Question 12 (1 point)

Résoudre dans le corps des réels l'équation suivante : $\log(\log x) + \log(\log(x^2) - 1) = 1$, où log réprésente le logarithme dans la base 10.

(A) $x = 316.23$ et $x = 0.01$ (B) $x = 158.12$ et $x = 0.1$

(C) $x = 31.62$ et $x = 0.1$ (D) $x = 0.1$ (E) $x = 316.23$

Question 13 (1point)

A quoi l'expression $\frac{d}{dx}\left[\int_a^x g(t)dt\right]$ est-elle équivalente ?

(A) $g(x)$ (B) $g(x) - g(a)$ (C) $g(x-a)$ (D) $g(a)$ (E) 0