NOM :

PRENOM :

Examen de Mathématiques du Signal

Jeudi 30 novembre 2006

Durée : 2h Sans documents Calculatrice autorisée

Les réponses aux questions doivent être rigoureusement démontrées, les essais successifs des différentes solutions ne constituant pas une démonstration.
Le barème est donné à titre indicatif.

Question 1 (1 point)

Sachant que pour tout x on a $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$, en déduire la valeur de

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \pi^{2k}}{(2k)!}$$

(A) 0 (B) π (C) 1 (D) -1 (E) $+\infty$

Question 2 (2 points)

Sachant que le polynôme $P(z) = 4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3+i\sqrt{3})z - 4$ possède une racine réelle, les solutions de l'équation $P(z) = 0$ dans l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$ sont

(A) $\{-\frac{1}{2}; -1-\sqrt{3}i; \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\}$ (B) $\{-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}i}{2}; -\frac{\sqrt{3}i}{2}\}$ (C) $\{-\frac{1}{2}; \frac{i}{2}; -\frac{i}{2}\}$

(D) $\{-\frac{1}{2}; 1-\sqrt{3}i; \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\}$ (E) $\{-\frac{1}{2}; 1+\sqrt{3}i; \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\}$

Question 3 (2 points)

La 1^{re} approximation de Newton x_1, pour un zéro de $f(x) = 3x^4 - 2x$ avec pour approximation initiale $x_0 = 1$, est

(A) $-\frac{3}{10}$ (B) $\frac{1}{10}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{9}{10}$ (E) $\frac{11}{10}$

Question 4 (1 point)

On donne la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} z-y & -\frac{x+y}{2} \\ 0 & z-2x \end{pmatrix}$ avec x,y et z des paramètres réels.

On demande de déterminer x,y et z de sorte que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(A) $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{4}{3}$, $z = \frac{8}{3}$ (B) $x = \frac{5}{6}$, $y = \frac{13}{6}$, $z = \frac{7}{6}$

(C) $x = \frac{5}{6}$, $y = \frac{13}{6}$, $z = \frac{8}{3}$ (D) $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{5}{4}$, $z = \frac{7}{4}$

(E) $x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{13}{6}$, $z = \frac{8}{3}$

Question 5 (1 point)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x^3 + 5x^2} = ?$$

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{10}$ (D) $-\frac{2}{5}$ (E) 0

Question 6 (3 points)

Résoudre dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ l'équation

$$\ln|x+4| + \ln|x-1| = \ln 6$$

(A) $\{-5;-1\}$ (B) $\{-5;-2;-1;2\}$ (C) $\{-5;-4;-1;1\}$ (D) $\{-5;-2\}$
(E) $\{-5;-4\}$

Question 7 (2 points)

La série de Fourier du signal 2π-périodique $x(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t \in [-\pi, 0[\\ \pi & \text{pour} \quad t \in [0, \pi] \end{cases}$ peut s'écrire

(A) $x(t) = \frac{\pi}{4} + \left(\sin(t) + \frac{sin(3t)}{3} + \frac{sin(5t)}{5} + \ldots\right)$

(B) $x(t) = \frac{\pi}{2} + 2\left(\sin(t) + \frac{sin(2t)}{2} + \frac{sin(3t)}{3} + \ldots\right)$

(C) $x(t) = 1 + \frac{\pi}{2} + 2\left(\sin(t) + \cos(2t) + \frac{sin(3t)}{3} + \frac{\cos(4t)}{2} + \frac{sin(5t)}{5} + \ldots\right)$

(D) $x(t) = \frac{\pi}{2} + 2\left(\sin(t) + \frac{sin(3t)}{3} + \frac{sin(5t)}{5} + \ldots\right)$

(E) $x(t) = 1 + \left(\cos(2t) + \frac{\cos(4t)}{2} + \frac{\cos(6t)}{3} + \ldots\right)$

Question 8 (2 points)

L'équation différentielle linéaire

$$\begin{cases} y'' - y' - 6y = 7 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

admet une solution unique g qui est définie sur $\mathbb{R}$ par

(A) $g(x) = \frac{3}{5}e^{-3x} + \frac{11}{10}e^{2x} - \frac{5}{6}$ (B) $g(x) = \frac{16}{15}e^{3x} + \frac{11}{10}e^{-2x} - \frac{7}{6}$

(C) $g(x) = \frac{11}{15}e^{3x} + \frac{7}{10}e^{-2x} - \frac{5}{6}$ (D) $g(x) = \frac{8}{7}e^{-x} + \frac{11}{10}e^{-3x} - \frac{5}{6}$

(E) $g(x) = \frac{4}{5}e^{3x} + \frac{12}{3}e^{-2x} - \frac{7}{6}$

Question 9 (1 point)

Soit $x(t)$ un signal réel impair. Calculer sa transformée de Fourier et en déduire que celle-ci est

(A) imaginaire pure et impaire (B) réelle et paire (C) réelle et impaire
(D) imaginaire pure et paire (E) aucune des précédentes réponses

Question 10 (2 points)

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+2)\sqrt{n+1} - (n+1)\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}} =$$

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) $\frac{1}{\pi}$

Question 11 (2 points)

Sachant que les matrices chaîne $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ et admittance $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$ permettent d'écrire $\begin{bmatrix} V_e \\ I_e \end{bmatrix}$ en fonction de $\begin{bmatrix} V_s \\ -I_s \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} I_e \\ I_s \end{bmatrix}$ en fonction de $\begin{bmatrix} V_e \\ V_s \end{bmatrix}$, respectivement.
Exprimer $\mathbf{Y}$ en fonction des éléments de $\mathbf{K}$.

(A) $\mathbf{Y} = \frac{1}{B} \begin{bmatrix} D & -\det(\mathbf{K}) \\ -1 & A \end{bmatrix}$ (B) $\mathbf{Y} = \frac{1}{\det(\mathbf{K})} \begin{bmatrix} D & -1 \\ -B & A \end{bmatrix}$

(C) $\mathbf{Y} = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} D & -C \\ -1 & B \end{bmatrix}$ (D) $\mathbf{Y} = -\frac{1}{\det(\mathbf{K})} \begin{bmatrix} 1 & A \\ D & -B \end{bmatrix}$

(E) $\mathbf{Y} = \frac{1}{B} \begin{bmatrix} D & -\det(\mathbf{K}) \\ -C & A \end{bmatrix}$

Question 12 (1 point)

Que vaut la dérivée $f'(x)$ de la fonction suivante

$$f(x) = \frac{x^2(\ln x)^3 e^{5x}}{2x+9} \quad ?$$

(A) $f'(x) = \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x \ln x} + 5 - \frac{2}{2x+9}\right)$

(B) $f'(x) = \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x \ln x} + 5 - \frac{2}{2x+9}\right) \frac{x^2(\ln x)^3 e^{5x}}{2x+9}$

(C) $f'(x) = \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x \ln x} - \frac{2}{2x+9}\right) \frac{x^2(\ln x)^3 e^{5x}}{2x+9}$

(D) $f'(x) = \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x \ln x} + \frac{5}{x^2} - \frac{2}{2x+9}\right) \frac{x^2(\ln x)^3 e^{5x}}{2x+9}$

(E) $f'(x) = \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x \ln x} - \frac{2}{2x+9}\right)$