NOM :

PRENOM :

Examen de Mathématiques du Signal

Lundi 26 novembre 2007

Durée : 2h Sans documents Calculatrice autorisée

Les réponses aux questions doivent être rigoureusement démontrées, les essais successifs des différentes solutions ne constituant pas une démonstration.
Le barème est donné à titre indicatif.

Question 1 (1 point)

Soit $P(x) = x^2 + px + q$ un polynôme où les coefficients p et q sont réels. On sait que P a une racine complexe z dont la partie imaginaire est égale à -6. Déterminer la relation entre les coefficients p et q.

(A) $q = 16 + \frac{p^2}{8}$ (B) $q = 3p + 2$ (C) $q = 4 - \frac{p}{2}$ (D) $q = 36 + \frac{p^2}{4}$
(E) $q = p$

Question 2 (2 points)

Résoudre l'équation différentielle

$$y" - 4y' + 3y = 3$$

avec les conditions initiales

$$y(0) = -1 \quad \text{et} \quad y'(0) = 2$$

(A) $-4e^x + 2e^{3x} + 1$ (B) $2e^x - 4e^{3x} + 1$ (C) $e^x + 2e^{3x} + \frac{1}{2}$

(D) $\frac{1}{2}e^{3x} + \frac{3}{2}e^x$ (E) $e^{3x} + e^x$

Question 3 (2 points)

On donne la matrice $\mathbf{B}_m = \begin{pmatrix} m & m & -1 \\ m & -1 & m \\ -1 & m & m \end{pmatrix}$ avec $m \in \mathbb{R}$.

Dans quel cas la matrice $\mathbf{B}_m$ est-elle inversible ?

(A) jamais (B) $m \notin \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$ (C) toujours

(D) $m \notin \{0, -1\}$ (E) $m \neq 0$

Question 4 (2 points)

$$\lim_{x \to \infty} x - \sqrt{(x^2 - x)} = ?$$

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 0 (D) -1 (E) $+\infty$

Question 5 (2 points)

Soit $\theta \neq 2\pi p$ avec $p \in \mathbb{Z}$. Pour tout entier $n \geq 1$, calculer $\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$. En déduire la somme suivante : $\sum_{k=0}^{n} sin(k\theta)$.

(A) $-\frac{sin\frac{n\theta}{2} sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{sin\frac{\theta}{2}}$ (B) $\frac{sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{sin\frac{\theta}{2}}$ (C) 1 (D) $\frac{sin\frac{n\theta}{2} sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{sin\frac{\theta}{2}}$

(E) $\frac{cos\frac{n\theta}{2}}{sin\frac{\theta}{2}}$

Question 6 (2 points)

La série de Fourier du signal 2π-périodique

$$x(t) = t, \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

peut s'écrire

(A) $x(t) = \frac{\pi}{4} + \left(\sin(t) + \frac{sin(3t)}{3} + \frac{sin(5t)}{5} + \dots\right)$

(B) $x(t) = \frac{\pi}{2} + 2\left(\sin(t) + \frac{sin(2t)}{2} + \frac{sin(3t)}{3} + \dots\right)$

(C) $x(t) = 2\left(\sin(t) - \frac{sin(2t)}{2} + \frac{sin(3t)}{3} - \dots\right)$

(D) $x(t) = \frac{\pi}{2} + 2\left(\sin(t) + \frac{sin(3t)}{3} + \frac{sin(5t)}{5} + \dots\right)$

(E) $x(t) = 1 + \left(\cos(2t) + \frac{\cos(4t)}{2} + \frac{\cos(6t)}{3} + \dots\right)$

Question 7 (1 point)

Soit $f(x) = \begin{cases} \sqrt[4]{(x+4)^2} & , \quad x \leq 0 \\ x^2 + x - 5 & , \quad 0 < x < 2 \\ \sqrt{(3-x)} & , \quad x > 2 \end{cases}$

Evaluer la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

(A) 2 (B) -5 (C) $\nexists$ (D) 0 (E) $-\infty$

Question 8 (1 point)

La 1re approximation de Newton x_1, pour un zéro de $f(x) = \frac{x^3}{6} - 2x^2 + 3$ avec pour approximation initiale $x_0 = 1$, est

(A) $-\frac{7}{2}$ (B) $\frac{7}{6}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{4}{3}$ (E) $\frac{1}{3}$

Question 9 (2 points)

De quel nombre complexe Z les nombres complexes z_k de la forme $z_k = \sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{16}+k\frac{\pi}{2}\right)}$ sont-ils les racines 4-ièmes ?

(A) $Z = 1 + i$ (B) $Z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ (C) $Z = i$ (D) $Z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
(E) aucune des précédentes réponses

Question 10 (2 points)

Calculer la décomposition en série de Fourier du signal périodique de période T $x(t) = \frac{4X_{max}t^2}{T^2}$ sur $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.
Grâce au calcul de $x(t)$ à un instant particulier, en déduire ensuite que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad = \quad ?$$

(A) $\frac{\pi^4}{90}$ (B) $-\frac{\pi^2}{12}$ (C) 0 (D) $\frac{\pi^3}{24}$ (E) $\frac{15}{\pi}$

Question 11 (2 points)

Les matrices hybride $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$ et impédance $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$ permettent d'écrire $\begin{bmatrix} V_e \\ I_s \end{bmatrix}$ en fonction de $\begin{bmatrix} I_e \\ V_s \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} V_e \\ V_s \end{bmatrix}$ en fonction de $\begin{bmatrix} I_e \\ I_s \end{bmatrix}$, respectivement.

Exprimer $\mathbf{Z}$ en fonction des éléments de $\mathbf{H}$.

(A) $\mathbf{Z} = \frac{1}{h_{22}} \begin{bmatrix} \det(\mathbf{H}) & h_{12} \\ -h_{21} & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\mathbf{Z} = \frac{1}{\det(\mathbf{H})} \begin{bmatrix} h_{22} & -1 \\ -h_{21} & h_{11} \end{bmatrix}$

(C) $\mathbf{Z} = \frac{1}{h_{12}} \begin{bmatrix} h_{22} & -h21 \\ -1 & \det(\mathbf{H}) \end{bmatrix}$ (D) $\mathbf{Z} = -\frac{1}{\det(\mathbf{H})} \begin{bmatrix} 1 & h_{11} \\ h_{22} & -h_{21} \end{bmatrix}$

(E) $\mathbf{Z} = \frac{1}{h_{12}} \begin{bmatrix} h_{22} & -\det(\mathbf{H}) \\ -h_{21} & h_{11} \end{bmatrix}$

Question 12 (2 points)

On appelle "suite de Fibonacci" la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

Sachant que pour tout $n \in \mathbb{N}$ u_n peut s'écrire sous la forme $u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n$ déterminer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = ?$$

(A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (B) $\frac{-\sqrt{5}}{5}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$